VISUAL REVIEW | Vol. 9, No. 2, 2022 | ISSN 2695-9631
International Visual Culture Review / Revista Internacional de Cultura Visual
https://doi.org/10.37467/revvisual.v9.5020

LÓGICA FORMAL, REPRESENTACIÓN E INTUICIÓN
Los límites de la representación e intuición clásicas de objetos matemáticos

Formal Logic, Representation and Intuition
The limits of classical representation and intuition of abstract objects

JOSÉ ALEJANDRO FERNÁNDEZ CUESTA[1, 2]
[1] Universidad Rey Juan Carlos, España
[2] Universidad Complutense de Madrid, España

KEYWORDS

Intuition
Representation
Images
Formal Logic
Mathematics
Abstract Objects

ABSTRACT

The Philosophical study of the representation of mathematical objects requires a prior definition of what we mean by intuition. In this article I introduce an argument that shows why we cannot represent every conceptually manipulable object. To reach this conclusion I will admit that there are certain abstract objects that cannot be apprehended intuitively. In order to do so, I will historically review their characterisation and formal definition. Finally, I will establish an updated basis on which to initiate a specific study of the role of object representation in formal science.

PALABRAS CLAVE

Intuición
Representación
Imágenes
Lógica formal
Matemáticas
Objetos abstractos

RESUMEN

El estudio filosófico de la representación de objetos matemáticos exige definir, previamente, qué entendemos por intuición. En el presente artículo introduzco un argumento que muestra por qué no podemos representar todo objeto manipulable conceptualmente hablando. Para alcanzar esta conclusión admitiré que existen ciertos objetos abstractos no aprehensibles de manera intuitiva. Y, para ello, repasaré históricamente su caracterización y definición formal. Finalmente, asentaré una base actualizada sobre la que iniciar un estudio específico acerca del papel de la representación de objetos en ciencias formales.

Recibido: 03/ 07 / 2022
Aceptado: 15/ 12 / 2022

1. Introducción

Existe una gran cantidad de bibliografía científica en las áreas de pedagogía, psicología, matemáticas, física, química, biología, lógica y filosofía, entre otras, dedicada al estudio del papel que juegan ciertas imágenes y representaciones en el desarrollo, fundamentación, estudio o manipulación de ciertos objetos y conceptos[1]. Y es, de hecho, también habitual en cualquiera de las disciplinas anteriores utilizar diagramas específicos para *representar* ciertos objetos y sus relaciones —puntos, elementos de un conjunto, estados, pasos de un proceso, etc.— y, sin embargo, no clarificar exactamente cuál es el estatus epistemológico u ontológico del ejercicio de dicha representación. En el caso de las materias cuyo fin es el estudio de la representación, por un flagrante circularismo ya que su objeto de estudio está incluido en la metodología empleada para abordarlo. En el caso de aquellas áreas cuyo objeto de estudio es distinto, porque se torna ilegítimo. Surge, entonces, de manera natural, plantearse la necesidad de utilizar meta-representaciones, pero esto es inviable.

El objetivo del presente artículo es el de justificar por qué y clarificar cuál es, o habría de ser, la discusión filosófica correcta a la hora de plantearse cualquier postura respecto del estatus de tales representaciones. El estudio filosófico de la representación de objetos abstractos como los que mencionaremos más adelante exige definir qué noción de intuición manejamos y, como veremos, numerosos resultados históricos obtenidos en la lógica y la matemática han ofrecido un repertorio suficiente como para abandonar las nociones clásicas de *representación* e *intuición*. En esta primera sección plantearemos un argumento que, en caso de no renunciar a las caracterizaciones clásicas, no podremos afrontar más que como una paradoja natural que irrumpe en la epistemología contemporánea.

El concepto de *intuición* es, sin duda, uno de los más utilizados en cualquier contexto de análisis filosófico. Apelar a la *intuitividad* por un lado o a la *contraintuitividad* o *antiintuitividad* por otro sirve, en numerosas ocasiones[2], como un criterio de discernimiento argumentativo o un punto de anclaje directamente axiomático: sin mayor justificación[3]. Esto es especialmente relevante en el caso de polémicas filosóficas informales y, curiosamente, en contextos de filosofía aplicada tales como puedan ser la ética, la estética, la filosofía del derecho, del lenguaje, etc. así como todas sus derivaciones, ampliaciones y ramificaciones. Sin embargo, basta profundizar un poco en el ejercicio de clarificación del término *intuición* para darse cuenta de la falta de consenso y la oscuridad terminológica que entraña dicha noción.

La *intuición*, pensada a lo largo la historia de la filosofía como una facultad humana, exige, para una correcta caracterización, definir antes lo que entendamos por representaciones o *imágenes mentales* como condición, aunque no suficiente. Nosotros, como sujetos racionales, somos capaces de construir configuraciones intelectivas, sean las que sean, para crear nuestra imagen del mundo. Pero, precisamente por esto último, los límites a la hora de representarnos ciertos objetos por medio de imágenes —en sentido amplio, no solamente visuales— a través de la intuición serán, al menos, candidatos preferentes a configurar los límites de la misma facultad.

Esto es especialmente relevante en lógica y filosofía de la lógica contemporáneas, donde uno toma partido a favor o en contra de admitir la *existencia* de ciertos objetos de carácter abstracto cuya *representación* no parece, al menos de entrada, posible, pero que, sin embargo, sí somos capaces de manipular intelectivamente. Esto constituye una de las contradicciones, al menos en apariencia, más acuciantes de la epistemología contemporánea:

1. Si soy capaz de manipular un objeto mental, φ, entonces soy capaz de representarlo.
2. Puedo manipular un objeto φ y realizar operaciones con él en un contexto *formal*.
3. Por tanto, he de tener la capacidad de representarlo, al menos, en dichos contextos.
4. *Pero* no puedo realizar dicho ejercicio de representación.
5. Luego 1 no es cierto.

Justificar 4 es el objetivo del presente artículo y, por tanto, el abandono del argumento por contradictorio. La pregunta es si hay, al menos, un objeto tal que se pueda manipular, pero no representar. Sin embargo, antes de entrar en la evaluación de la viabilidad de 4, es fácil observar que la

[1] Martin (2007).
[2] Nado (2015).
[3] Gilbert (2011).

clave para poder mantener 1, aun cuando se admita 4, está en la especificación de que un contexto sea *formal* para 2. Sería razonable considerar que hay una clase de manipulaciones amplia entre las que se incluyen aquellas de tipo *formal* basadas en la abstracción de las que no se sigue la capacidad de representación. En este sentido podríamos reformular el argumento anterior como sigue:

1'. Si soy capaz de manipular materialmente un objeto φ, entonces soy capaz de representarlo.
2'. Puedo manipular materialmente un objeto φ y realizar operaciones con él.
3'. Por tanto, he de tener la capacidad de representarlo.

Esta reformulación nos dotaría de una versión aceptable del argumento anterior compatible con la asunción de 4 con la que aquí nos comprometemos. Pero ¿qué significa *manipular formalmente* un objeto con base en un ejercicio de abstracción? Hay, actualmente, muchas maneras de abordar este problema y su clarificación constituye aún hoy día una de las grandes preguntas abiertas en la investigación filosófica, sin embargo, se puede plantear desde dos perspectivas distintas, pero enormemente clarificadoras y que no es descabellado plantear como conceptualmente indisolubles. Nos limitaremos a mencionarlas antes de tratar el punto 4 del argumento inicial y la pregunta acerca de si es posible y, en caso de serlo, cómo, manipular objetos carentes de representación.

En primer lugar, desde una perspectiva teórica filosófica el proceso de extrapolar los análisis lógico-formales a teorías generales conocido como *positivismo lógico* o *neopositivismo*, en cuyo detalle no podemos entrar[4], vio su culmen a principios del XX con la publicación del *Tractatus Logico-Philosophicus*[5]. En él, se generalizó a un marco ontológico, que más tarde sería utilizado como punto de partida por el conocido como *Círculo de Viena*, el estudio de las puras formas lógicas, de hecho, como la base de cualquier construcción racional y, por ende, de cualquier conocimiento posible[6]. La arriesgada, pero bien acogida, propuesta de Wittgenstein junto al *atomismo lógico* propuesto por Russell[7] propusieron que en el nivel de análisis fundamental las manipulaciones conceptuales se realizarían con base en las puras formas lógicas. El ejemplo trivial es que frente a un *hecho* constatable como que mi ordenador se halla sobre la mesa, uno realizaría el siguiente ejercicio de abstracción hasta quedarse solamente con la forma lógica de tal enunciado, la proposición:

a) El ordenador está sobre la mesa.
b) Estar-sobre (<ordenador, mesa>), representando que se trata de un par ordenado sobre el que estipulo un predicado relacional.
c) $R(\langle a, b \rangle)$.

Y el *cálculo de predicados de primer orden* bastaría para estudiar todas estas relaciones alumbrando resultados inesperados como que predicados monádicos, categorías clásicas, que podría predicar de mi mismo ordenador, como que sea plateado o tenga un total de 79 teclas, comparten la misma *función lógica* que las relaciones, que solamente serán predicados pero *diádicos*. La manipulación formal consistía, por tanto, en el estudio lógico de un conjunto de enunciados. Hoy en día, incluso de teorías completas gracias a la semántica de estructuras y la teoría de modelos[8]. Como veremos más adelante, estas aproximaciones generaron objetos puramente formales cuya manipulación lógica estaba asegurada, pero cuya representación intuitiva quedaba fuera de juego.

El otro ejemplo relevante, también relacionado con la lógica, pero desde una dimensión radicalmente distinta y más actual, es el proceso conocido como *machine learning*. Desde los procesos de aprendizaje automático, un algoritmo concreto realiza un proceso de manipulación que podemos caracterizar formalmente, pero que no somos capaces de representar. Un modelo generativo de lenguaje, como GPT-3 de OpenAI, por ejemplo, no permite representar intuitivamente el proceso de generación de texto concreto, pero sí definirlo matemáticamente: punto interesante para deshacer confusiones[9].

Pero volvamos al argumento inicial, ¿hay realmente objetos que legitimen lo afirmado en 4? Es decir, ¿hay, al menos, un objeto que sea manipulable pero no representable en general que podamos incluir

---

[4] Ayer (1959).
[5] Wittgenstein (1922).
[6] Ramsey (1931).
[7] Russell (1918).
[8] Bell (2022).
[9] Malík (2022), Gherab (2022) y Fernández Mateo (2022).

en la versión modificada del argumento al caracterizarlo desde una perspectiva puramente formal? La respuesta que daremos aquí es que sí y las consecuencias inmediatas de dicha respuesta permiten distinguir, por un lado, una intuición clásica unida a la representación de los objetos sin posibilidad de concebir uno que encajase en 4 y, por otro lado, una nueva definición de intuición que, forzada a actualizarse, bloqueará la posibilidad de admisión de dicho tipo de objetos de manera explícita.

Con esta distinción presente, podremos admitir 4 y afirmar la conclusión alcanzada en 5: que no todo elemento manipulable es representable ni caracterizable intuitivamente. Para esto, primero caracterizaremos con mayor detalle las nociones de *intuición* y *representación* clásicas y, una vez realizado este ejercicio, veremos cuáles fueron los principales resultados *formales* que nos sirven para distanciarnos de las nociones clásicas.

2. Intuición y representación clásicas

Cuando se piensa en un análisis filosófico de la *imagen*, es habitual pensar, directamente, en un enfoque estético; en un análisis filosófico de la obra artística como creación figurativa y todos los problemas *intencionales* derivados de la relación entre el autor, la obra y espectador, además de cualesquiera distinciones semióticas o semiológicas como el representante, el signo, etc.[10]. Sin embargo, hay una consideración más profunda y un análisis preliminar que se puede plantear en el ejercicio de clarificación conceptual de la *imagen* como noción eminentemente filosófica y es, precisamente, el que la relaciona con la facultad de la intuición atendiendo, especialmente, a los límites de esta.

Tal y como hemos mencionado, distinguiremos dos momentos, en cada uno de los cuales, la representación mental de diferentes objetos jugará un papel bien diferenciado. Pero debe quedar claro que no se trata tanto de dos instantes históricos rastreables *genéticamente* como de dos *perspectivas* o enfoques conceptualmente diferenciados dignos de analizar *genealógicamente*. Y, si bien es cierto que uno de ellos no es rastreable con anterioridad a una serie de acontecimientos históricos, esto no impide que el otro desaparezca a partir de dichos acontecimientos impidiendo cualquier tipo de convivencia.

Por un lado, a modo clásico, podemos decir que las imágenes y representaciones mentales no son algo intrínsecamente problemático. El primer argumento que escribimos en la sección anterior rige hasta 4 y este paso simplemente es falso. Por otro lado, sí que es problemática su relación, la de imágenes y representaciones, con la *experiencia*, por ejemplo, o su inclusión en cualquier tipo de deducción trascendental, pero de manera que no queden *inhabilitados* como punto de partida de construcción de una *arquitectónica de la razón*.

Además, en esta concepción clásica, si bien uno encuentra ejemplos *antiintuitivos* en ciertos resultados científicos, estos son, en último término, clarificables bajo un posible programa logicista, sobre esto volveré más adelante. Por otro lado, desde una perspectiva que podríamos llamar, en general, no-clásica, tanto las representaciones como los objetos de la intuición sufrirán una crisis lo suficientemente grave como para permitir inaugurar el debate acerca de la pregunta por los límites de la facultad de la intuición como un debate preminente a nivel filosófico: es la irrupción de 4.

Entrando en mayor detalle, el problema se dará a partir de una ruptura entre la manipulación conceptual de *objetos* susceptibles de satisfacer predicados existenciales y nuestra capacidad de generar representaciones intuitivas de estos. Y, para poder introducir correctamente dicha ruptura, debemos mencionar, al menos, aquellos acontecimientos que la situaron en el debate académico contemporáneo: esta tarea nos permitirá caracterizar la relación entre *intuición, imagen* y *representación*, por un lado, y definir con mayor exhaustividad las dos grandes posturas que hemos mencionado hasta ver de dónde viene 4, aunque sin juzgar aún ni entrar a valorar su viabilidad. Una cosa es que matemáticos y físicos pongan teorías sobre la mesa que, en bruto, permitan hablar de objetos no-intuitivos y sin posibilidad de representación y otra que se fundamente esta ruptura en cuanto que tal en un plano filosófico, lógico y matemático.

Cuando uno se pone a estudiar cualquier manual de lógica formal y, especialmente, cualquiera dedicado a una lógica no-clásica, se encontrará siempre una justificación filosófica, histórica o técnica para fundamentar la motivación de dicha lógica no-clásica. Habitualmente, estas justificaciones aludirán a ciertos límites de la *lógica clásica* o a ciertas paradojas específicas que esta no logra resolver de manera satisfactoria —o en absoluto— según tales o cuales criterios filosóficos más generales. Y en la mayoría

[10] Pérez (1999).

de casos se mencionará, tarde o temprano, algún avance científico-técnico producido a partir de finales del XIX.

Es también frecuente aludir a debates metafísicos más profundos y criticar, por ejemplo, que la *lógica clásica* habría partido de una serie de presuposiciones sin justificar que, de suprimirse, permitirían aflorar nuevas semánticas y nuevos cálculos. Sin embargo, pocas veces se desarrolla en detalle qué es lo que habrá de entenderse *in concreto* por «lógica clásica» y esto da pie a confusiones no triviales.

Hablar de una «lógica no-clásica» es emplear un término negativo, una expresión molecular construida sobre otra atómica positiva: la de «lógica clásica». Por lo que el ejercicio de clarificación acerca de qué habrá de entenderse por lógica clásica se vuelve un punto crucial. Aquí existen, habitualmente, cuatro respuestas, aunque este no es un análisis exhaustivo y las líneas pueden ser muy grises:

(A) Por lógica clásica puede entenderse la *silogística* aristotélica en sentido más o menos amplio y más o menos estricto —filológicamente hablando—: aludiendo a (A.1) la silogística en sentido técnico como la teoría de los silogismos desarrolla por Aristóteles y ampliada durante el Medioevo[11], o a (A.2) ciertos principios metafísicos asumidos por esta, más o menos amplios, y el rechazo a un compromiso literal con la teoría del silogismo aristotélica.

(B) Por lógica clásica suele entenderse también el *álgebra de Boole*, álgebra equivalente a un lenguaje lógico de enunciados de orden cero bivalente y su cálculo asociado. Debido a que es equivalente a numerosas teorías clásicas, como la probabilidad de Kolmogorov, adopta este nombre, aunque no nace como formalismo hasta el XIX. La frontera se difumina con A.2. ya que la «clasicidad» del álgebra de Boole suele defenderse por su compatibilidad con algunos principios lógico-epistemológicos aristotélicos. Especialmente los de tercio excluso y bivalencia, contradicción e identidad.

(C) Finalmente, por lógica clásica se acostumbra a tomar la lógica de predicados de primer orden, preferiblemente con identidad. Este es uno de los más interesantes ya que hay más argumentos a favor de tomar dicho lenguaje formal como «lógica clásica» que para el resto. En primer lugar, un lenguaje estándar de primer orden permite definir, en su seno, tanto a (A) como a (B) sin errores aristotélicos. Y, en concreto, respeta (A.2). Pero, además, es capaz de dar cuenta de una serie de teorías clásicas no reducibles a álgebras de Boole. Para empezar, las axiomáticas estándar clásicas —o no clásicas— como la aritmética de Peano o geométrica de Euclides son definibles desde (C) pero no desde (A) ni (B)[12].

Cada uno de los puntos anteriores tiene, sin duda, múltiples variantes. Por ejemplo, no es lo mismo hablar en (A) de Aristóteles remitiendo simplemente a los principios recogidos en el libro Γ de la Metafísica, que remitir a las sistematizaciones escolásticas de su silogística, o hablar de los *Analíticos* y de *Categorías*, etc. Sin embargo, la división anterior es lo suficientemente general como para permitir que todos estos matices caigan con relativa facilidad bajo una de las tres rúbricas.

Un buen punto de arranque para caracterizar los límites de la facultad de la intuición en la perspectiva clásica pasa por entender que (A) fue, durante mucho tiempo, lo que caracterizó la rúbrica de «lógica clásica» y que, hoy en día, lo hace a nivel puramente histórico, pero que es realmente (3) lo que actualmente, en un contexto lo suficientemente técnico y especializado, sirve para definir con precisión lo que ha de entenderse por «lógica clásica». Y aquí, «clásico», en un sentido no meramente histórico, sí que tomará la misma acepción que al ser predicado de la caracterización de la facultad de la *intuición*.

Digamos que la lógica clásica entendida como en (C) surgió y se asentó cuando la ruptura de la intuición y representación clásicas, entendidas *à la* (A), pasó a ser inevitable abandonando la dimensión aristotélico-kantiana. Deberíamos, por tanto, hablar de *clásico*^{1} y *clásico*^{2} para poder distinguir, con verdadera precisión, aquellos desarrollos previos —insisto, no necesariamente en sentido cronológico— a la ruptura con la intuición y representación *clásicas*^{1} y, en segundo lugar, respecto de una perspectiva del conocimiento en cuanto que acumulativo, de *clásico*^{2} para mentar todos aquellos desarrollos que, con posterioridad a dicha ruptura, asumen los cambios y, aun así, son capaces de fundamentar las teorías y los desarrollos *clásicos*^{1} que no se hayan visto directamente afectados de

[11] Benítez López (2020).
[12] Beth y Piaget (1974).

manera esencial o refutados por el cambio. En este último sentido, la lógica de primer orden —desarrollada a lo largo de todo el siglo XX— sería *clásica*[2] por cuanto que es capaz de fundamentar y definir teorías y nociones *clásicas*[1] y, además, otras tantas que no lo son y respetar en su seno la satisfacibilidad de los principios de (A.2), entre otra serie de motivos que tampoco podemos entrar a evaluar. A partir de ahora omitiremos los súper-índices por motivos obvios y siempre que hablemos de «clásico» nos referiremos a *clásico*[1], pero cuando sea necesario puntualizar que tomamos la lógica de primer orden como clásica, como auténtica lógica clásica, entonces retomaremos la notación y hablaremos, simplemente, de *lógica clásica*[2].

Volviendo a los propios cambios, como tal, el primer paso de la intuición clásica a la no-clásica, lógico antes que cronológico, lo supuso la constatación de que la silogística aristotélica no bastaba ya para poder realizar un ejercicio de fundamentación del mayor exponente clásico de la matemática: los Elementos de Euclides. Esto ha salido ya, precisamente, como ejemplo de la capacidad de la lógica de predicados de primer orden y como justificación de su apodo de *clásica*[2]. La redacción de axiomas y el método deductivo de teoremas relevantes desde estos a partir de la aplicación de una serie de reglas y principios lógicos implícitos mostró que con la silogística en la mano y las reglas de transformación de silogismos no nos bastaba para poder construir una teoría geométrica clásica. Una semántica de estructuras de primer orden, en cambio, se ha mostrado suficiente para modelizar no solamente teorías matemáticas geométricas, sino también físicas clásicas y no-clásicas.

Beth (1961) consideró que, frente a esta imposibilidad de representación por parte de la silogística, había dos opciones. O bien la propuesta aristotélica no podía fundamentar el análisis matemático, pero otra alternativa que la sustituyese sí, o bien resultaría imposible de realizar el ejercicio lógico de fundamentación en absoluto. Y uno de los primeros en darse cuenta de esta ruptura, si bien no disponía aún de una semántica de primer orden estándar para poder llevar a cabo una fundamentación completa, fue Descartes. Esta ruptura permitió, además, la reformulación de un problema clásico, el problema de los universales[13], en términos no-clásicos o, al menos, no tanto, conectándolo con el que hoy se conoce como problema de los objetos abstractos[14].

En su obra, Descartes logra separar ya, de manera explícita, el razonamiento silogístico del matemático. Y esto tiene implicaciones filosóficas profundas[15]. En su *Quinta meditación*, Descartes señala explícitamente que lo importante es que la intuición se aplique a un *objeto* concreto, aun cuando este no sea «material»:

> Cuando imagino un triángulo, si bien puede ser que no haya en lugar alguno del mundo, salvo en mi pensamiento, semejante figura, y que no la haya habido jamás, no por ello deja de haber cierta naturaleza, forma o esencia determinada de esta figura, la cual es inmutable y eterna, que yo no la he inventado y que no depende en modo alguno de mi espíritu; según aparece del hecho de que se puedan demostrar sus propiedades diversas de tal triángulo, a saber, que sus tres ángulos son iguales a dos rectos, que el ángulo mayor se apoya en el lado mayor. (Descartes, 1842, p. 84)

Es decir, Descartes planteó que el razonamiento matemático, si bien necesita siempre de objetos específicos sobre los que trabajar, estos podrán ser lo que hoy llamaríamos *objetos abstractos* —concretos inmateriales— y no necesariamente espacio-temporales y, en cualquier caso, mientras que el razonamiento basado en el silogismo partiría de premisas universales para alcanzar conclusiones igualmente universales, el razonamiento matemático introduce un paso intermedio que consiste en la contemplación de un objeto individual: un objeto, eso sí, inmaterial.

Pero entonces surge, inmediatamente, el problema de la justificación de la generalización del objeto concreto inmaterial con el que se operará en matemáticas. Este paso intermedio, ¿qué estatus tiene? Si bien Descartes no se hizo cargo de esta dificultad, pues parece que él mismo no tomó conciencia de la revolución filosófica que yacía implícita a su propuesta *analítica* y *formal*, la tradición posterior, especialmente Berkeley y, sobre todo, Kant, sí que tomaría el relevo. Para Descartes, es la esencia misma del triángulo y no un triángulo cualquiera lo que constituye el objeto de la intuición. Otras propuestas, como por ejemplo la de Locke, propusieron modificaciones que no son especialmente substanciales para el objeto del presente estudio pero que iluminan el problema. Para Locke, la intuición trabaja con un

[13] Cfr. Beauchot (1980).
[14] Falguera y Martínez-Vidal (2012).
[15] Cfr. Descartes (1842).

triángulo general que no cumple con ninguna de las propiedades de un triángulo concreto al igual que la *forma* platónica de *perro* no es capaz de ladrar. Y Berkeley criticó la solución conceptualista de Locke de la siguiente forma:

> Mas vamos a preguntar ahora cómo podemos saber que una proposición sea verdadera para todos los triángulos particulares a menos que primero la hayamos visto demostrada para la idea abstracta de triángulo, que conviene igualmente a todos. Pues, de que se pueda demostrar que una propiedad conviene a cierto triángulo particular, no se sigue que la posea asimismo cualquier otro triángulo que no sea igual a aquél en todos los respectos. [...] Es cierto que el diagrama que tengo a la vista incluye todas estas particularidades, pero no se hace la menor mención de ellas en la demostración de la proposición [...]. (Berkeley, 1710, § 16)

Está claro, entonces, que la intuición solamente podría operar respecto de objetos concretos aun cuando estos sean inmateriales. Berkeley constata aquí lo que hoy en día llamamos problema de inducción. La respuesta kantiana puede leerse como una coordinación de las respuestas cartesiana y lockeana por un lado, con la crítica de Berkeley por otro. Esto se refleja, por ejemplo, en el análisis magnitudinal kantiano, donde necesariamente tendremos que trabajar con *imágenes* o *representaciones* concretas, es decir, objetos que instancian la idea particular del triángulo inmaterial para poder proceder con éxito.

Así, en la KrV B XII, el propio Kant ilustró que el modo de proceder para poder alcanzar un conocimiento de dicho objeto ha de pasar por explicitar lo que se haya *puesto* mentalmente *a priori* en la propia figura a través de una representación conceptual. El triángulo construido mediante la mera imaginación desde la intuición pura será lo que podamos tomar como la *esencia* cartesiana del triángulo mismo o identificar con la definición del *triángulo general* lockeano.

Como el triángulo kantiano no posee determinaciones individuales que no se siguen de las condiciones generales y abstractas de su construcción, entonces se ha de postular la facultad de imaginar un triángulo que no cumpla con ninguna de las propiedades específicas de ningún triángulo y esto ya parece, al menos de entrada, incompatible con cualquier acontecimiento mental o hecho psicológico elemental: estamos ante el plano trascendental. Este ejercicio es, de hecho, para autores como Meillassoux[16] y ciertos realistas especulativos, el paso característico de la modernidad.

La problematicidad de esta ruptura con el acontecimiento netamente psicológico —imaginación pura *vs* representación particular— en Kant se pudo salvar gracias, entre otros esfuerzos teóricos, a una serie de compromisos delicados sobre los que descansó su *arquitectónica de la razón*, si bien no podemos analizar con todo el detalle que merecerían, cabe enumerarlos:

(1) La distinción *analítico-sintético*: basada directamente en la distinción entre *sujeto-predicado*. En *Prol*. § 2 se explicita esto, caracterizando que la informatividad —sintéticos— o falta de esta —analiticidad— de un juicio descansa directamente en que el *predicado* contenga o no «lo que estaba realmente pensado en el concepto del sujeto». Esta distinción es nuclear, ya que permite salvar que el objeto matemático sea conocido, precisamente, mediante un proceso deductivo *a priori* y que, sin embargo, no sea *analítico,* sino que suponga una ampliación del conocimiento —salvando la matemática de su consideración como mera tautología. La pregunta fundamental acerca de cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*, hilo conductor de la deducción trascendental, descansa en esta distinción inicial.

(2) La estética trascendental: en segundo lugar, permite compatibilizar el esquema anterior mediante la facultad de la intuición como punto de arranque y fundamento elemental. Que los conceptos puros de la intuición, espacio y tiempo, permitan la unificación de las sensaciones dando origen a la *percepción* y logrando encajar la mecánica newtoniana —espacio y tiempo como absolutos ontológicos en distinción dualista radical— con la fundamentación del conocimiento de los propios objetos matemáticos es el único punto de partida posible dentro del esquema kantiano. Así, de la intuición espacial, un sujeto puede generar una fundamentación de la geometría pura y, de la temporal, hacer lo propio con la aritmética —desde la idea de secuenciación. Esto será clave más adelante. La crisis de la

[16] Meillassoux (2006).

intuición afectará, en sentido estricto, a esta caracterización kantiana sobre las demás por varios motivos que tendremos la oportunidad de comentar.

(3) La lógica aristotélica, como silogística, implícita: entendida como una ciencia terminada que el propio Kant, KrV B, VIII considera «definitivamente concluida». Esta lógica base permite no solamente tomar un punto de contacto con toda la tradición metafísica anterior, sino también fundamentar los análisis de (1) y (2).

(4) Los límites claros marcados por el ideal de la razón: fundamentando los límites en la generación de nociones intelectivas como *antinomias* de la razón, identificándolas y caracterizando su genealogía específica para *salvar* los límites del conocimiento de manera explícita.

Así, el punto de ruptura más dramático lo supone la asunción de la lógica clásica como (C), aunque esto no se hiciera de manera repentina, sí que iría asentando paulatinamente un alejamiento, cada vez más marcado, de las tesis kantianas —salvo en ciertas discusiones y áreas como la ética o la filosofía política, muchas veces ciegas voluntariamente a todas estas discusiones analíticas—. Se trató de un proceso lento y extremadamente arduo de contribuciones que se prolongaron durante todo el siglo XX, muchas veces dando pasos en falso, hasta culminar en consecuencias tan palpables como que, hoy en día, ningún temario de una asignatura de *lógica formal* en un plan de estudios superior se basa, de manera principal, en el estudio de la silogística aristotélica. Pero la ruptura con la lógica aristotélica como herramienta para poder realizar ejercicios de fundamentación de objetos y estructuras abstractos no-clásicos generó una ruptura más dramática: entre la lógica y la psicología[17].

Así, vemos que el propio Frege (1892) fue uno de los primeros en subrayar la importancia de desvincular el estudio de las representaciones psicológicas aprehendidas por la intuición —ya fuera con base en la experiencia o por motivos representacionales puramente *eidéticos*— de los *pensamientos* objetivos fundamentados en deducciones *a priori* de nociones formales especialmente representadas por objetos abstractos de carácter aritmético. De hecho, es esta ruptura la que obnubila a Carnap (1932), Schlick (1930) y al propio Russell (1918), motivando un «viraje» filosófico que culminaría con la generalización de los *Principia Mathematica* a nivel formal y del *Tractatus Logico-Philosophicus* a nivel ontológico, como ya hemos mencionado: había surgido el debate contemporáneo en torno a los objetos abstractos.

Este cambio se ha querido entrever ya en el seno histórico de la propia disciplina matemática. Así, por ejemplo, las conocidas como *grandes revoluciones* en matemáticas pueden atisbarse como una ruptura con cualquier caracterización intuitiva representacional y cabría, entonces, preguntarse en qué difirió la crisis de fundamentación[18] de finales del XIX de la crisis de fundamentación en la cosmovisión griega cuando a mediados del siglo V a.C. los pitagóricos descubrieron la inconmensurabilidad de la diagonal. La idea clave es que los resultados no intuitivos *clásicos* como sorprendentes, lo eran solamente de manera provisional: a falta de una justificación *posible* y esperada o, al menos, esperable. Así, un resultado *clásico* no intuitivo era representable mediante uno o varios objetos aprehensibles de manera intuitiva ya fuera por definición o por diagramatización —y preferiblemente ambas—. Casos de este estilo fueron los infinitesimales, las múltiples dimensiones o la parte imaginaria de los números complejos en sus primeras definiciones.

Pensemos, por ejemplo, en un resultado clásico y no esperado que muchos tildarían de *anti-intuitivo* pero que, en sentido estricto, sí resulta intuitivo puesto que sí resulta representable. En realidad, ejemplos de este estilo hay millares. El teorema de Pitágoras podría ser perfectamente uno, sin lugar a dudas. Pero pensemos en uno más —aunque este aumento solamente se deba a una costumbre sociológica contingente ya arraigada: el teorema lo aprendemos en el colegio— sorprendente, la llamada *paradoja del cumpleaños*, por ejemplo, establece un resultado tan sorprendente que muchos no han dudado de tildar de «paradoja» aunque en realidad no es tal[19]. Las revoluciones matemáticas clásicas y cualesquiera resultados sorprendentes incluidos en su seno son despachables con unas pocas operaciones lógico-matemáticas si asumimos una lógica de predicados de primer orden y cualquier

---

[17] Cfr. Beth, y Piaget (1974).

[18] Cfr. Rey Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática*. Vols. I y II. Editorial Gedisa: Barcelona.

[19] Ejemplos como este hay incontables. Uno muy *anti-intuitivo* en el sentido informal del término que aquí estamos tratando es el de la conocida como *trompeta de Torricelli* o *cuerno de Gabriel* ideada por Torricelli en torno al 1641.

teoría de conjuntos estándar con la suficiente capacidad expresiva. De hecho, la gran mayoría de avances pueden resultar sorprendentes en este sentido y, sin embargo, no obligarnos a romper por definición con la noción de intuición clásica.

3. Crisis de la intuición clásica y formalización

En el desarrollo clásico, que podemos ejemplificar con la mixtura lógico-metafísica Aristóteles-Kant, la validez de la representación sujeta a los límites de clarificación eidética tras las críticas empiristas a los sentidos —matizando, aunque no demasiado, el residuo sensualista aristotélico que podría entreverse en el primer libro de la *Metafísica*— perdura hoy, entre otras ramas, en la vía *fenomenológica*. Esta nació indefectiblemente ligada al debate en torno a los límites de la representación, al igual que las corrientes *analistas* o *analíticas* a nivel filosófico y las posturas *logicista, formalista* e *intuicionista* respecto de la problemática en torno a la facultad de la intuición y el problema de los objetos abstractos en la filosofía de las matemáticas. Si bien la fenomenología hermenéutica terminó olvidando esta problematicidad en la mayoría de sus preocupaciones cotidianas, no se debe olvidar que Heidegger recupera algunos de estos problemas en sus *Conferencias y artículos* y que ya entrados los años 70 ciertos autores, especialmente franceses influidos por Badiou[20], trataron igualmente de volver a tender los puentes tratando de reconectar dos tradiciones que ya se habían alejado demasiado a nivel material y formal-metodológico. No podemos entrar, por supuesto, en estos análisis, pero tampoco se puede dejar de mencionar la capital preocupación que jugó esta discusión en la primera edición de las *Investigaciones Lógicas* del mismo Husserl[21].

Como decíamos al comienzo, es habitual entender que la reflexión filosófica en torno a la noción de *imagen* hoy en día parte de contextos estéticos. Y, aun así, estos también se hallan históricamente anclados al problema en torno a la facultad de la propia intuición. No solamente por las teorías estéticas de corte kantiano acerca del desbordamiento de las propias facultades en lo *sublime* sino, especialmente, en las aproximaciones semióticas o semiológicas[22] todavía presentes en numerosos análisis de críticas estéticas y lingüísticas. Un punto de discusión decisivo en la pervivencia de los esquemas de Saussure, Peirce o el triángulo de Odgen-Richards es, sin duda, la caracterización de aquellos objetos abstractos que, al menos ciertos autores, empezaron a manipular conceptualmente bloqueando, por definición, la posibilidad de su caracterización representativa misma.

Y, volviendo a lo anterior, debemos admitir que la postura que siguió al cambio de concepción de la lógica, sustituyendo paulatinamente la silogística por un lenguaje asociado a un cálculo evaluable desde una teoría de modelos, sumado a la irrupción de ciertas nociones que ponían en jaque la caracterización clásica de la *representación* intuitiva de imágenes respecto de la manipulación de objetos *concretos* aunque inmateriales, terminarían abriendo, al menos, la necesidad de discutir si desde dichos cambios es legítimo, ahora, hablar de un *momento* —como decíamos también antes, no necesariamente temporal o cronológico— *clásico* y de otro *no-clásico* o no.

¿Y cuáles han sido, entonces, las motivaciones para este desplazamiento que nos ha alejado o, al menos, nos ha permitido abrir un debate en torno a si nos hemos alejado o no de la noción clásica de *intuición*? Lo que está claro es que, con la facultad de la intuición en crisis y la validez de la representación limitada, la caracterización kantiana que antes mencionamos se debe situar en una *epokhé* escéptica ya que uno de los motivos de cambio de la lógica aristotélica es la supresión de la distinción sujeto-predicado como distinción fundamental, lo cual afecta directamente a la distinción entre juicios sintéticos y analíticos tal y como los define el propio Kant. Además, la propia deducción trascendental de las categorías se ve también tocada por el cambio de *tipos* de juicios —algo menos trivial de lo que muchos críticos y estudiosos kantianos consideran. Y lo que es más grave aún, en la evaluación de los objetos concretos que ponen en jaque todo lo anteriormente mencionado y motivan el cambio y alejamiento de la fundamentación aristotélico-kantiana encontramos *objetos* como los infinitos en acto de Cantor, este es uno de los verdaderos puntos de ruptura.

Estos infinitos desterrarían, en apariencia al menos, la noción de *infinito* como mera secuencialidad clásica y el proyecto de fundamentación aritmético-geométrica contenida en la KrV, así como muchas

[20] Badiou (1988).
[21] Cfr. García-Baró (2008).
[22] Cfr. De Bustos Guadaño (1999).

otras consecuencias ancladas en la asunción de imposibilidad de un infinito en acto —recordemos el peso que tiene para la teoría kantiana que Dios sea interpretado como una antinomia—, pasando a admitir infinitos en acto manipulables conceptualmente pero no representables intuitivamente así como los métodos de prueba mal llamados *indirectos* empleados en las teorías conjuntistas que lo introducían. De hecho, en este punto, aunque Kant no sea tan radical como Aristóteles, queda justificada su agrupación como trato pre-actualista.

Por otro lado, los resultados en física, especialmente en relatividad especial y más tarde en cuántica y teoría del caos, supondrían una ruptura en el dualismo espacio-temporal que conectaba directamente la estética trascendental kantiana con la física derivada de las tesis de Barrow y Newton y la geometría euclídea clásica.

De lo anterior deriva, además, otra de las mayores quiebras respecto de la validez de la intuición entendida como facultad clásica en el contexto de un análisis filosófico: la proliferación de *pluralismos* metodológicos tanto en lógica —desde nuevas semánticas— como en matemáticas —con matemáticas no-estándar y teorías de fundamentación conjuntistas o mereológicas entre otras no-clásicas— o en física. El pluralismo de perspectivas instrumentalistas, asociadas en el sentido más débil y relativistas en el más profundo, pone en jaque también una capacidad intuitiva clásica al quebrar, por completo, la trascendentalidad del sujeto contemporáneo. Y, aunque no podamos más que mencionarlo, tras las rupturas que estudiaremos en la siguiente sección, cabe incluir una más relacionada con esta última consecuencia pluralista. Los análisis no lineales como fundamento de distintas teorías ontológicas emergentistas y dinámicas, así como de teorías no-cognitivistas como el enactivismo, han abierto, durante los últimos años, nuevas vías de cuestionamiento de la facultad representativa basada en la intuición clásica, esta vez, no de la mano de la física y la matemática, sino de la biología. Entrar a valorar estas últimas exigiría, dada su actualidad y complejidad, un estudio aparte. Pero es interesante dejar señalada esta línea como posible vía de análisis futuro. Veamos con un poco de detenimiento los dos puntos de ruptura que ya hemos mencionado y como, desde ellos, pasa a ser pertinente la afirmación de 4 en el argumento de la introducción.

4. Límites abstractos de la facultad de la intuición

Ortega y Gasset (1915) distinguió, inscrito en cierta tradición fenomenológica, tres «distancias» de todo objeto a la conciencia: presencia, re-presentación y mención. Así, por utilizar su mismo ejemplo, una persona puede *ver* el Monasterio de El Escorial y tenerlo *presente*; estar delante de un grabado o incluso un recuerdo y *re-presentárselo* o coincidir frente a una *mención* sin, por ejemplo, haberlo llegado a ver nunca, pero comprendiendo perfectamente a lo que el interlocutor se está refiriendo.

Estas tres distancias se encuadran, a su vez, en un esquema dualista, en primer lugar, a nivel ontológico, pues «ser» se divide en lo que hoy llamaríamos *realidad* —«percepción»— y *abstracción* —«fantasía»— como, en segundo lugar, a nivel de conciencia, dividida en *actitud —sub-iectum*— y *algo* —*ob-iectum*. El carácter de los actos de conciencia, para Ortega, consiste en «referirse siempre a algo más allá de ellos» y, por tanto, se permite como legítima la asunción de la ruptura del solipsismo como problema escéptico[23]. La pregunta, claro está, surge inmediatamente respecto de la posibilidad de la comprensión frente a la mera *mención*: cómo es posible que admitamos que «deducciones, teorías, sistemas son verdad si cuanto en ellas y ellos se dice ha sido tomado por visión directa de los mismos objetos, de los fenómenos mismos». Y la respuesta que el propio Ortega ofrece es clara:

> Yo no veo ahora ni acierto a representarme “el número que contiene todos los números”, “la estrella más lejana de la tierra”, “la ameba primera que existió”; pero sí veo, y porque lo veo sé, que ahora entiendo esos nombres y que con ellos me refiero a ciertos objetos únicos e inconfundibles, los cuales no están presentes ante mí, ni siquiera como ausentes me son representados, sino que ellos se me ofrecen precisamente y solo como objetos a que yo me refiero, sin más. (Ortega, 1915)

Pero la pregunta, planteada en términos completamente legítimos, en un contexto clásico, remite ahora, por lo que hemos dicho en la sección anterior, a nuevos interrogantes. Especialmente los siguientes:

[23] Fernández Cuesta (2022).

(1) ¿Y si de dicho objeto yo no puedo adquirir una *vivencia* en el sentido estricto fenomenológico? Es decir, ¿y si no le corresponde a determinado objeto con que yo pueda trabajar en una teoría formal una representación en la intuición sino que, por definición, tomo la manipulación de algo que *está por él* pero sin ningún tipo de relación causal entre el signo y el objeto? Esta pregunta, claramente, se replanteará en términos de relación objeto-representación-signo y las respuestas serán los programas intuicionista, predicativista, logicista y formalista. Hemos topado con el problema epistemológico de Benacerraf que más adelante trataremos y que nos situa frente a la dificultad de tratar objetos con los que no interactuamos causalmente.

(2) El Monasterio de El Escorial, al igual que el ordenador frente al que yo me encuentro escribiendo ahora mismo, son objetos —si se quiere espacio-temporales, si no, fenoménicos— que me puedo *acercar* —por continuar con la metáfora orteguiana— a la conciencia con relativa facilidad. Además, dicho acercamiento es algo que puedo contrastar y poner en relación con otros observadores pero, ¿qué sucede si el objeto es un objeto abstracto —como el concreto inmaterial que veíamos al principio discutiendo sobre el triángulo—? ¿Puedo realmente acercarlo? Si la respuesta es negativa, estaremos ante un problema serio para poder dar *cuenta y razón* de la operatividad de los análisis matemáticos. Si la respuesta es afirmativa la siguiente pregunta que surge es ¿cómo?

(3) Finalmente, dicho objeto abstracto, pongamos por caso, un número complejo o, simplemente, un número negativo o el conjunto vacío, ¿está representado o mentado? Si está re-presentado debemos preguntarnos qué es lo que re-presenta, cómo aproximo esto a mi conciencia y cómo se puede distinguir sin entrar en un dominio nouménico *ideal* en el sentido kantiano. Si está mentado ¿significa entonces que no hay universalidad, referente, ni sentido en cada uno de los elementos implicados en un desarrollo matemático? ¿Cómo distinguir el estatus epistemológico entre dos enunciados como «a=a» y «a=b»?[24]

El origen conceptual de estas preguntas puede verse, también, como una reformulación contemporánea del problema clásico de los universales, pero, en cualquier caso, se deben mencionar, al menos, cinco corrientes que, actualmente, negarían la problematicidad de las preguntas anteriores y la distinción clásico/no-clásico que hemos distinguido. Cinco corrientes que, si bien son lo suficientemente complejas como para no poder mencionar más que de pasada una simple caricatura, sí que podrían permitirnos extraer con mayor o menor acierto un rasgo común a todas ellas: el no ofrecer una respuesta a las preguntas anteriores respecto del estatus epistemológico de los objetos abstractos y su *re-presentación*:

I. Reduccionismo desde la Sociología/Historia/Filosofía de la Ciencia[25]: desde ciertas corrientes en filosofía de la ciencia de carácter puramente sociológico —aquí podría incluirse, por ejemplo, cierto instrumentalismo radical— es fácil comprender que dichos objetos abstractos se reducirán a la mera manipulación que de ellos realicen personas concretas —probablemente científicos de manera preferible— en distintos contextos académicos específicos. El fenómeno antropológico-social, la dimensión cultural o la perspectiva contextualista agotan la reflexión filosófica en torno a estas nociones.

II. Reduccionismo desde la Filosofía de la Biología/Antropología Filosófica: desde estas áreas —cabe incluir ciertos desarrollos enactivistas y análisis anclados en las metafísicas de procesos biológicos ya mencionados— se puede, hoy en día, encontrar una respuesta que, si bien es muy próxima, difiere en una caracterización nuclear. Aquí no se suprime el problema de los objetos abstractos porque sean un constructo a nivel social, cultural o práctico-científico, sino porque se puede reducir a una fundamentación de corte biológico-antropológica. Obviamente, existen numerosos análisis de (1) que se fusionan con (2) y, en la práctica, es difícil encontrar ejemplos claros de diferenciación radical, pero a nivel conceptual pueden distinguirse.

III. Análisis desde la Filosofía del Lenguaje: otra opción es, bien desde el pragmatismo en filosofía del lenguaje o bien desde la asunción de la tesis de la relatividad lingüística en filosofía de la

[24] Frege (1892).
[25] Cfr. Rivadulla (2004).

lingüística —o ambas—, bloquear la generación de *objetos* abstractos desde ataques a la noción de significado o incluso referente —en el primer caso— o de validez universal —en el segundo caso.

IV. Reducción desde la Fenomenología: la postura fenomenológica trata de *disolver* el problema, si bien no lo pretende eliminar por completo. El principal problema es que sufre, desde Heidegger, un giro lo suficientemente pronunciado como para terminar bloqueando —o intentando bloquear— las condiciones de posibilidad del planteamiento de la cuestión que aquí estamos tratando de desentrañar.

V. Escepticismo y Relativismo clásicos: como asunción clásica por la que se bloquearía cualquier posibilidad de avance de conocimiento pudiendo utilizar cualesquiera —o todos— los argumentos derivados de (1)-(4) para proseguir una suspensión del juicio. Un escepticismo refinado, como el que encontramos en la modernidad, podría plantear la misma problematicidad, pero aludiendo a argumentos contrafácticos [26]. El relativismo clásico, subsumible en parte en (1) y en parte en (3) en una versión actualizada, simplemente bloquearía el interés de dicho objeto abstracto en términos formales y, por supuesto, universales. Además, como veremos más adelante, la discusión en concreto respecto del *relativismo lingüístico* —tan encuadrable aquí como en (3)— puede, de no negar la mayor, suponer también un punto de ruptura respecto de la fiabilidad de la intuición clásica.

Por supuesto, la clasificación anterior es más propedéutica que exhaustiva y no existe en la práctica académica real en un estado tan puro salvo contadas excepciones. El común denominador, sin embargo, de todas las posturas anteriores es que, de una manera u otra, no permiten responder a las preguntas que surgían de la respuesta orteguiana a la posibilidad de la mención y que lo hacen, desde el arranque de su investigación, de manera implícita. Pero ¿cuáles son realmente esos retos que estas corrientes despreciarían o negarían? ¿Cuál fue el fundamento histórico de la problematicidad respecto de la constatación de esos objetos que hemos afirmado que rompen con la dinámica clásica aristotélico-kantiana? En las siguientes dos secciones nos limitaremos a mencionarlos de forma que la carga de la prueba pase a recaer a nivel justificativo sobre las cinco corrientes anteriores y no al revés.

4.1. Límites abstractos y respuestas formales

En primer lugar, cuando hablamos de *límites abstractos* ya estamos realizando una división artificial, aunque con una justificación metodológica pertinente. Es artificial porque las categorías de *abstracción* y *concreción* son lo suficientemente confusas y arrastran una carga filosófica demasiado grande como para que no sean problemáticas. Pero, sobre todo, nos sitúan frente al peligro de incurrir en cierto circularismo por el que, asumiendo dicha distinción, de entrada, nos veamos forzados a tener que justificar el estatus epistemológico de ciertos objetos abstractos cuya constatación no irrumpiría de no partir de dicha distinción.

En primer lugar, es fácil argumentar que la distinción entre objetos concretos y abstractos resulta metodológicamente pertinente ya que encontramos a nivel histórico y sociológico dicha división. Hoy en día es un problema registrado en la literatura académica, pero, sobre todo, es una distinción que irrumpe a raíz de una serie de resultados históricos especialmente encuadrados en el campo de las matemáticas. Esto justifica que la crítica por el empleo del término «abstracto» o «concreto» sea, aquí, lo de menos y podrá utilizarse, si se prefiere, cualquier otra distinción clásica patente en algún momento de la historia de la filosofía que si elegimos no utilizar es debido al contexto que ya existe en torno al empleo, precisamente sociológico, de la distinción abstracto/concreto cuando se predica de ciertos objetos. Aunque esto, por supuesto, no significa que haya de examinarse dicha distinción de manera prioritaria. Simplemente significa que no lo haremos aquí. Nos limitaremos a registrarla.

Además, en segundo lugar, mencionar los resultados matemáticos concretos que pusieron en jaque la caracterización clásica de la intuición coincide con el mismo ejercicio de analizar históricamente: (i) la justificación de la propia distinción y (ii) su relación con la afirmación de 4 en el primer argumento que veíamos en la introducción. Lo que no debe perderse de vista es que uno de nuestros argumentos principales pasa por asumir que son distintas caras de un mismo problema.

[26] Fernández Cuesta (2022).

Puede consultarse cualquier *historia de las matemáticas* o *de la lógica* para comprobar fácilmente que existe un contexto claro en torno a la lectura del debate acerca de la fundamentación de ciertas estructuras matemáticas en cuyo estudio se estaba comenzando a profundizar a finales del XIX en clave de una problemática relacionada directamente con los límites de *representación* e *intuición* como en un contexto clásico nunca había acaecido.

Por un lado, respecto de la historia de la aritmética y la definición de los distintos conjuntos de números en lo que hoy conocemos como estructuras algebraicas estándar, a principios del XIX, se interpretó que realizar dichas definiciones pasaba a formar parte de un proyecto de *fundamentación* que serviría, indirectamente eso sí, para aclarar y definir nociones que habían irrumpido en el contexto matemático entre los siglos XVII y XVIII y que aún eran objeto de numerosas polémicas interpretativas —la mayoría de corte ontológico y filosófico—. Las disputas matemáticas, físicas y filosóficas se asentaban, en este contexto, en una falta de consenso generalizada acerca de la definición de términos y nociones tan clave como eran las de conjunto, infinito, límite o aplicación.

En la década de los 70 del siglo XIX, Bolzano, Dedekind, Weierstrass y Cantor, entre otros, destacaron centrándose en el desarrollo, desde el cálculo, de una definición de *conjunto infinito* no ya como una mera ficción o quimera conceptual en la línea kantiana —continuación natural del tratamiento aristotélico—, sino como un objeto matemático más. Así, exploraron el camino de la *aritmetización* del análisis matemático con relativo éxito y, finalmente, terminaron tomando el conjunto de los naturales como la base conceptual sobre la que definir el resto de números: primero los enteros, sobre estos los racionales, sobre estos los reales y, finalmente, sobre el dominio de los reales, los números complejos cuya aplicación había proliferado exponencialmente.

Este proyecto, tomado como un proyecto de *fundamentación*,[27] se cerró al definir directamente el conjunto de los reales desde el de los racionales mediante sucesiones convergentes, series de Cauchy y cortaduras de Dedekind. Todo el análisis matemático se vio reducido entonces al problema de la axiomatización de la aritmética misma: realizado este ejercicio, el edificio de la matemática estaría completo.

Por otro lado, los matemáticos concentraron sus esfuerzos, en la década de los 70, en el estudio de las funciones reales de una variable real: Cantor inició el estudio del análisis de propiedades y predicados de determinados conjuntos infinitos de números en los que los reales jugaban un papel clave. Esto se debió a que el interés anterior por el análisis matemático hizo que la atención recayera sobre los reales de manera relevante. En 1851, Liouville había establecido la existencia de los números trascendentes como no-algebraicos. Pues bien, mediante la numerabilidad de estos últimos y la no-numerabilidad del conjunto de los reales se pudo demostrar el sorprendente resultado de que la mayoría de los reales eran, en realidad, trascendentes. De modo indirecto eso había determinado la constatación del teorema de Liouville, por el que se garantizaba la existencia de infinitos trascendentes en cualquier intervalo abierto —no vacío.

El estudio de estos resultados y de la fundamentación de la aritmética en general exigía, como hemos mencionado, la clarificación de numerosas nociones, así como la inclusión de otras tantas nuevas: existencia, predicado, relación, aplicación, conjunto, etc. Y la tradición *logística*, anclada en el estudio de las herramientas para poder evaluar estas nociones incrustadas en los desarrollos de la lógica clásica, jugó un papel determinante. Las herramientas técnicas para poder proceder a la fundamentación de un método axiomático mismo —al puro estilo euclídeo— sirvieron de punto de encuentro para las tradiciones lógica y matemática. Peano, Schröder, De Morgan, Boole, Zermelo y más adelante personajes como Russell, Whitehead, Skolem o autores ya mencionados entre quienes destacaron Frege y Cantor sirvieron de bisagra para ambas disciplinas —algo reflejado aún hoy en día en los planes de estudio actuales de matemáticas y de filosofía. Los primeros pasos de la ciencia de computación a mediados del XX terminarían de acelerar este proceso de confluencia entre lógica y matemáticas.

Dedekind (1872, 1888) desarrolló su teoría de los números basándose en los conceptos de conjunto y aplicación caracterizando, por primera vez, en un sentido contemporáneo un conjunto infinito. Esto le ayudó a construir, con ayuda de pocos materiales, el edificio de los números naturales. Frege desarrolló su *Conceptografía* orientada a la fundamentación lógica de la aritmética y desarrolló la idea de

[27] Que, en cuanto que tal, no significaba nada más que lo dicho. Muchos autores sostienen, especialmente en España desde las coordenadas del Materialismo Filosófico, que nunca hubo tal proyecto confundiéndolo con un ejercicio de caracterización metafísica más genuinamente filosófica.

cardinalidad y Peano (1894, 1903) axiomatizó, finalmente, la aritmética en una exposición que mezclaba casi a partes iguales la enumeración de principios lógicos y definiciones matemáticas al mismo nivel: aún no se distinguían planos lógicos, meta-lógicos, estructurales, conjuntistas, mereológicos, aritméticos *per se* etc. Se trataba de propuestas que, por esto mismo, hoy día podrían tildarse de *informales* pero que, en aquel momento hace ya más de un siglo, supusieron un salto agigantado hacia el tanteo de disciplinas que aún no habían eclosionado.

Y la consecuencia que derivó inmediatamente de estos proyectos fue el estudio del *análisis matemático*, reduciéndolo ahora a la noción elemental o *primitiva* —aunque no por ello simple ni indefinida— de *conjunto*. Y aunque este proceder contó, desde el inicio, con sus detractores —destacan Kronecker, Poincaré y Wittgenstein—, sus ventajas prevalecieron: aún estábamos en un contexto capaz de salvar la perspectiva clásica.

Es por estos dos nuevos intereses por lo que los números reales pasaron a tener un papel protagonista en la filosofía de las matemáticas y en todos los ejercicios de definición, clarificación y fundamentación. Pero el verdadero punto de ruptura para la intuición clásica no está aquí. Este surgió cuando, en este contexto, emergieron paradojas cuya respuesta exigía un salto cualitativo y objetos que, por definición, atentaban contra los presupuestos sobre los que se asentaba el ejercicio de representación clásico.

Tradicionalmente, el estudio y la definición del infinito, desde su caracterización en la Grecia Clásica como *lo ilimitado* (*tò ápeiron*) había sido tomado, en términos generales como un infinito potencial: una secuencialidad infinita sobre la que existe siempre la posibilidad de añadir un elemento más. Solamente ciertas entidades privilegiadas, como Dios, podrían encarnar un infinito en *acto* en cuanto que ilimitación no meramente potencial, sino también fáctica: asertórica. Y aun así entraba en juego su inefabilidad o problemas de recursión.

Pero los avances en el estudio del cálculo y las respuestas de tipo conjuntista introducirían una caracterización matemática de ciertos conjuntos de cardinalidad infinita tomados, precisamente, en cuanto que objetos. Permitiendo, por tanto, introducir una noción de infinito *en acto* mediante una metodología no exenta de discusión. En Aristóteles y la gran mayoría de autores clásicos el *infinito* en potencia forzaba que, a nivel conceptual, los objetos cuya representación aprehendiese un sujeto en la intuición solamente podían ser, cada vez, segmentos finitos de dicha totalidad potencialmente ilimitada. Si bien es cierto que en el paradigma kantiano la idea de infinito *dinámico* se relaciona directamente con un infinito en acto, referente a una totalidad completa, este sería tomado como idea regulativa de la razón y por tanto como un artificio racional sometido al *ideal* desde el que se construirán las antinomias —es por esto por lo que decíamos que la concepción de Kant parece una continuación natural, lógica, de la aristotélica pero aún clásica—. El infinito matemático, por otro lado, encajaba mejor con la caracterización clásica en cuanto que *sucesión* en cuyo seno la predicación de ilimitación solamente podía tomarse como potencial.

Si bien es cierto que alrededor de la clarificación de la noción clásica de infinito siempre han surgido paradojas —entre las que destacan las de Zenón o Galileo—, en cuanto Bolzano, Dedekind, Frege, Peano y, especialmente, Cantor reivindicaron —con mayor o menor insistencia— la toma en consideración de un infinito en acto en un contexto de discusión metafísica influenciado enormemente por las tesis de Meinong y Brentano, quedó asentada la primera piedra para permitir un replanteamiento respecto de la facultad clásica de la intuición: ¿cómo, si es que fuera posible, podría caracterizarse la representación de un objeto definido como un infinito en acto, no en cuanto que idea regulativa, sino en cuanto que objeto abstracto? Esta, y no otra, es la justificación histórica de la asunción de 4 para el primer argumento. Algunas propuestas clásicas, como la idea de infinito en cuanto que *innata* para la filosofía de Descartes, solamente representarían un objeto por una relación especular respecto del verdadero ente *infinito*: Dios.

A principios de la década de los 70 del XIX, Heine propuso a Cantor un problema relativo a la unicidad de la representación de una función mediante una serie trigonométrica. Fue en el esfuerzo por resolver este problema cuando Cantor definió el conjunto de los reales mediante series convergentes de racionales en 1872. Y ya a principios de 1873 descubrió la numerabilidad del conjunto de los racionales, logrando demostrar que un conjunto denso sobre una línea tenía, en realidad, tantos elementos como un conjunto de puntos aislados sobre una línea —los naturales—. Este fue el prólogo histórico al planteamiento de la hipótesis del continuo que tampoco podremos tratar aquí en detalle.

Desde la noción de «cardinal» y de «potencia» —tomada de Steiner— Cantor formuló el problema del continuo de la siguiente forma: si el conjunto de los reales resulta que ahora no es numerable —asimilable a los naturales, es decir *contable*—, entonces este tendrá la potencia del continuo, pero ¿cuál, en concreto, era dicha potencia? Entre el 79 y el 84 desarrolló un método *indirecto* —esto será relevante más adelante— para resolver el problema del continuo y en el 83 publicó sus fundamentos para una teoría general de conjuntos.

Mediante el método de la diagonalización —muy extendido en aquel momento— Cantor pudo afirmar su famoso teorema —*teorema de Cantor*— por el que todo conjunto tiene una potencia estrictamente menor que su conjunto de partes, así como la no-numerabilidad de los reales de manera definitiva. Entre el 95 y el 97 desarrolló el estudio de esta nueva clase de números más abstracta que los reales como transfinitos y planteó propiamente el problema del continuo: qué lugar ocupa, en realidad, la potencia del continuo dentro de la sucesión de los cardinales transfinitos. Su respuesta, aún hoy en día sin demostrar, no fue otra más que la formulación de la conocida como *hipótesis del continuo*, asumiendo una continuidad transfinita en la secuencialidad de los ordinales.

Así las cosas, en el 96, Schröder ofreció una prueba incompleta que tan solo dos años después Bersnetin completaría culminando la demostración aceptada del hoy conocido como teorema de Schröder-Bernstein-Cantor. Este teorema estableció la condición suficiente para demostrar que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad afirmando que, si hay una inyección de un conjunto A a otro B y también una inyección inversa de B a A, entonces existe una biyección entre ambos conjuntos. En otras palabras, si somos capaces de encontrar una manera de emparejar cada elemento de un conjunto con elementos únicos de otro y también proceder de manera inversa, entonces ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos.

Pero la ruptura clásica no se daría solamente a partir de la constatación de lo anterior: la incapacidad, por un lado, de la silogística aristotélica y, por otro, de la fundamentación lógica kantiana, para dar cuenta de los nuevos conceptos empleados en matemáticas se sumaba a la introducción de esta nueva teoría de conjuntos que introducía, como objetos, algunos infinitos tomados en cuanto que infinitos en acto. El remate final fue que, en este proceso de fundamentación, definición y clarificación, en contra de lo que hubiera cabido esperar, surgieron nuevas paradojas y cada vez más profundas[28]. La famosa paradoja de Russell basada en los resultados de Bourali-Forti llevó a Cantor a matizar su casilla de salida —que el conjunto de todos los transfinitos o *alefs* no podía ser un conjunto bien ordenado— introduciendo su famosa distinción entre:

(1) Infinito absoluto: identificado con Dios en teología y con las colecciones arbitrariamente grandes en contextos matemáticos modelizados en la nueva teoría de conjuntos.
(2) Absoluto transfinito: como la potencia de los conjuntos, como el de los naturales o el de los reales.

Y esto terminó de romper completamente el valor de la caracterización de la intuición como criterio válido, al menos en este punto —luego veremos intentos de recuperarla, aunque en términos ya no-clásicos—, al admitir la existencia de objetos que ya no podían encajar en el esquema orteguiano visto anteriormente. En el 99 Cantor escribe una carta a Dedekind y sustituye la distinción anterior por la distinción entre multiplicidades entendidas como variedades o totalidad (i) consistentes e (ii) inconsistentes. Esta distinción es la que, aún hoy en día, sigue empleándose en teoría de conjuntos estándar, aunque con la terminología de von Neumann (1925) al hablar de *conjuntos* y de *clases*.

La paradoja de Russell, los desarrollos de Köning, la introducción por parte de Zermelo de un axioma de elección, la posterior formalización de Skolem en una semántica de primer orden, la anti-intuitividad de los nuevos objetos introducidos para fundamentar nociones conceptualmente más sencillas, la asunción de infinitos en acto, la falta de re-presentaciones de todas estas nociones y otros tantos

[28] De aquí surgió, precisamente, el sistema de los *Principia Mathematica* desde el que Gödel formuló sus dos famosos teoremas de incompletitud, los cuales terminarían de minar el modelo clásico. Pero centrarnos en cualquiera de estos resultados desbordaría nuestro objetivo: baste mencionar que la mayor generalización que entronca con los dos modos de formalización mencionados al comienzo fue la que equiparó cierta versión de los teoremas de incompletitud con cierta versión generalizada del problema de parada desde la recursividad.

problemas más pasaron a generar lo que hoy en día se conoce como *crisis* en la labor de fundamentación. Y frente a esta crisis y, en concreto, respecto de la ruptura con la caracterización clásica de la intuición, surgieron tres proyectos filosóficos que trataron de ofrecer tres posibles respuestas: intuicionismo, logicismo y formalismo. El formalismo buscó intentar rechazar los objetos abstractos en la línea de I-V, solo que atendiendo a los propios formalismos y sin despreciar el problema —hoy día es muy frecuente defenderlo desde posturas pragmatistas tipo III. El logicismo, que finalmente fracasó en los términos en que se planteó originalmente —reducción limpia de la matemática a la lógica y disolución por vía de dicho proceso de resultados anti-intuitivos[29]—, dejó un poso y un gran repertorio de argumentos realistas. Entre ellos destaca, dicho en una palabra, el tomar en consideración que si la matemática resultaba ser algo puramente convencional y el problema de los objetos abstractos no llegaba, siquiera, a irrumpir, no tendría sentido que generase en nosotros una sensación de desolación el topar con los límites de las posibilidades de formalización mismas: si los resultados eran tan inesperados no podía resultar que fueran obra nuestra. Para Gödel, entre otros, esta genuina respuesta, era la respuesta de hallarse frente al *descubrimiento* y no frente a la *invención*.

De esta manera, el intuicionismo se hizo cargo de la respuesta esperada. Las propuestas de Brouwer (1923, 1927), Heyting (1930, 1934, 1941) y posteriormente otros autores como Dummett (2000) trataron de salvar la noción clásica de *intuición*, aunque ahora ya no podría hacerse en los mismos términos, es decir, *à la* Kant. El precio a pagar, de hecho, fue alto: los valores de verdad de la lógica ya no serían sino valores de demostrabilidad que tendrían en cuenta si cierto enunciado se hallaba en el seno sociológico de la ciencia tomado como demostrado o refutado. Pero, puesto que existía una tercera vía ya que un enunciado podía existir como una conjetura o mera hipótesis pendiente, en el mejor de los casos, de ser demostrado o refutado en un futuro, introducían un tercer valor de verdad, dos negaciones —fuerte y débil— para poder contrarrestar esto y, sobre todo, bloqueaban la posibilidad de demostrar la existencia de ciertos objetos a partir de métodos de reducción al absurdo —extrayendo una contradicción de su negación—, lo que implicaba eliminar la regla de eliminación de la doble negación —coherente con tres valores de verdad—. Todo ello, de la mano de la mayor defensa del constructivismo matemático: bloqueando, precisamente, cualquier objeto que no fuera definible en términos constructivistas, es decir, representacionales recursivamente y aprehensible, por tanto, a la intuición.

En cualquier caso, había quedado abandonada la lógica clásica aristotélica que Kant tomó como completamente terminada e irrefutable y, de la superación de esta, destaca especialmente el abandono de la diferencia entre sujeto/predicado a favor de la distinción entre función/argumento, lo que, a su vez, obligaba a replantear —si no descartar— la generalidad de la dupla analítico-sintético con la que Kant arranca como distinción central. Sumado lo anterior a la discusión sobre el estatus epistemológico —que no ontológico, esta es la clave— de los *álefs*, los límites marcados por el ideal de la razón y la intuición y, en general, los puntos mencionados como clave en la primera sección de los análisis kantianos quedaban completamente rebasados. Teniendo en cuenta, además, que el trato de todos estos nuevos objetos era puramente *formal* en la acepción *atomista* que vimos más arriba, el papel de la representación en la configuración de un conocimiento riguroso quedaba completamente cuestionado y esta, en cuanto que facultad, herida de muerte.

4.2. La constatación de una superación

El reto que suponen los resultados conjuntistas para la aceptación de una teoría de la intuición clásica y una filosofía en que la *imagen* representacional tenga un papel relevante a nivel conceptual se refleja perfectamente en dos argumentos muy conocidos: el *argumento de la indispensabilidad* de Quine (1976)-Putnam (1979) y el conocido como *problema epistemológico* de Benacerraf (1973) que ya mencionamos de pasada. El primero se podría sintetizar de la siguiente manera:

1. Tenemos que comprometernos ontológicamente con todas, y sólo con aquellas entidades indispensables para nuestras mejores teorías científicas.
2. Las entidades matemáticas son indispensables para nuestras mejores teorías.

⊨ Debemos comprometernos ontológicamente con las entidades matemáticas.

[29] Pues el estudio de las relaciones puras entre conceptos formales y las *leyes del pensamiento* no pueden ser, por definición, anti-intuitivas.

Son muchas las críticas que, por supuesto, se pueden hacer y se han hecho a este argumento y no podemos aquí explicarlas, pero tampoco comprometernos con el argumento completo o en parte. Sí que resulta, sin embargo, útil estudiarlo para poder explicitar la ruptura que nos ocupa cuando constatamos que la problematicidad en el proyecto de fundamentación reside en la admisión de ciertos objetos con cuya asunción ontológica, en general, nos vemos envueltos en nuevos problemas.

Uno puede comprometerse con la existencia de ciertos objetos abstractos, en general, sin relativa complicación[30]. Así lo hacen los hablantes competentes de cualquier lengua al emplear cualquier término matemático elemental o mentar cualquier objeto de ficción. Si alguien dijera, por ejemplo, que «Sherlock Holmes, el detective que vive en Baker Road…» y otro interlocutor le interrumpiese para corregir que, *en realidad*, «Sherlock Holmes vive en Baker Street» nadie sospecharía de una ruptura con la aceptabilidad de la intuición en cuanto que criterio epistemológico, al menos, en ciertos niveles —pues el problema del estatus ontológico de los objetos de ficción no está exento de polémica—.

El problema se torna acuciante cuando, entre dichos objetos, constatamos algunos que no podemos representar, pero que, además parecen exceder incluso los límites de la *estética trascendental* y, lejos de presentarse como *antinómicos*, nos sentimos capaces de manipular conceptualmente. Esto es importante ya que la mera imposibilidad de representación de un objeto como el 0, el número π o un teseracto no atenta contra la definición misma de los límites de la *capacidad de representación* en general.

Podemos pensar, por ejemplo, en que existe el espía más alto del mundo o el astro más alejado de nuestro planeta y, sin embargo, ser incapaces de representárnoslos. Volvamos al texto de Ortega, quien incluyó ejemplos parecidos. Estos objetos habrán de quedar sitos solamente en la mención. Pero no se leerán como auto-contradictorios. El problema filosófico respecto de un ordinal transfinito es que, *por definición*, no podrá haber representación alguna de él por exceder los límites de la propia capacidad de representación: pues podríamos constatar que tal o cual espía o tal o cual astro concreto son, aunque no lo sean, el espía más alto o el astro más alejado, pero nunca podremos constatar ω^{ω}.

Podría decirse que del pensamiento abstracto y objetivo de aprehensión de un sentido del infinito potencial al infinito en acto hay, por tanto, un salto cualitativo. Pero esto se rechaza en cuanto se comprende que la definición de los *alefs* es, en último término, con base en su cardinalidad y que solamente están diferenciados, como conjuntos inductivos, cuantitativamente: son manipulados a nivel formal.

Es cierto, volviendo al argumento de la indispensabilidad, que aquí se asume que *ser dispensable* no es lo mismo que ser *suprimible* —ya que entonces todo sería dispensable— así como una postura *naturalista* —en que la filosofía se estructuraría como un saber de *segundo orden* sin frontera clara— y cierto *holismo confirmacional* —ya que una corroboración o demostración científicas confirmativas afectarían a toda la teorí—, pero el núcleo del argumento sirve, no obstante, para ilustrar que, a nivel clásico, la problematicidad de dicho compromiso ontológico podría resolverse, como hemos dicho, trivialmente. Mientras que para ciertas entidades abstractas no.

Y si nos asomamos a las críticas u objeciones al argumento de la indispensabilidad cabe destacar que ninguna afecta al núcleo principal que aquí queremos asumir. Núcleo por el que podría interpretarse en términos de limitación respecto de la re-presentación de objetos abstractos de cierto tipo. Parsons (1980) se preguntó, por ejemplo, por qué serían realmente indispensables las matemáticas mientras que Field (1980) o Maddy (1990) ofrecen críticas de carácter más instrumentalista y pragmatista respectivamente en una línea parecida a Sober (1993). Más interesante resulta la propuesta crítica de Benacerraf (1983) quien recupera el problema que planteábamos al inicio acerca de cómo conocemos entidades causalmente inertes como puedan ser las matemáticas si nosotros somos seres causales.

En cualquier caso, durante el siglo XX y aún hoy en día en versiones modificadas, encontramos tres posibles respuestas frente al problema de caracterización de objetos abstractos tan conceptualmente problemáticos como los infinitos en acto de Cantor. No son otras más que logicismo, intuicionismo y formalismo. Pero esto no nos vuelve a situar en la casilla de salida, sino que nos permite afirmar que se trata, en último lugar, de uno y el mismo debate: el debate filosófico en torno a los límites de la intuición a la luz de ciertos resultados formales.

---

[30] Frápolli Sanz (2014).

El problema epistemológico de Benacerraf (1973) se puede resumir de la siguiente forma:

1. Nuestra mejor teoría del conocimiento es causal.
2. Los objetos abstractos no son espacio-temporales, pero los matemáticos y lógicos que los estudian sí.
3. El conocimiento matemático se lleva a cabo por parte de matemáticos y lógicos investigando dichos objetos abstractos.

⊨ Nuestra mejor teoría epistemológica fuerza una interacción causal entre matemáticos y objetos abstractos.

Pero dicha teoría es, a todas luces, imposible por definición. ¿Qué sucede entonces? Además, el problema permanece, aunque cambiemos nuestra teoría epistemológica —al coherentismo o instrumentalismo, etc.

Las soluciones a este problema han sido múltiples y variadas[31] y hoy suponen uno de los problemas más relevantes en la filosofía de la lógica contemporánea. Pero no nos interesa aquí enunciar una solución al problema. Solamente incluirlo como la constatación sociológica que mencionábamos al comienzo de la distinción entre objetos abstractos y concretos y, en concreto, trayendo a colación una lectura de los dos argumentos anteriores que permiten entender el debate en torno a la superación de la intuición clásica como el punto de partida fundamental.

Pero no tenemos que modificar el esquema clásico *solamente* con base en los argumentos anteriores fruto de la historia y filosofía de la lógica y la matemática. En la historia de la física encontramos también numerosos argumentos que influyeron a la hora de esta superación y casi de forma coordinada con los avances lógico—matemáticos supusieron el surgimiento del neopositivismo arraigado en una tradición kantiana que ahora carecía de fundamento[32]. La relatividad einsteniana terminaba de dar el tiro de gracia a la noción de la intuición clásica. Hasta entonces los conceptos *a priori* de la sensibilidad en la estética trascendental kantiana, base de la intuición, como eran espacio y tiempo, terminaron por ser ilusorios y, en el mejor de los casos, una constatación de nuestra limitación racional. Pero si esta racionalidad sentenciada a pensar espacial y temporalmente había generado una teoría en que se demostraba un continuo espacio-temporal y la coordinación de sucesos y eventos en una teoría física realista, entonces, de nuevo, habríamos topado con un límite de representación. Las coordenaciones relativistas —especiales— de partículas móviles en coordenadas de Minkowski[33] rompían la biyección cristalina que conectaba el dualismo intuitivo kantiano —espacial *y* temporal— con las nociones de espacio y tiempo absolutos newtonianas y un espacio de fase como formalismo para analizar vectorialmente cuerpos en un espacio euclídeo y en el plano de los reales.

La mecánica cuántica o la teoría del caos provocaron también, al menos durante los años de sus formulaciones originales, una separación radical de las concepciones clásicas y proyectos originales y novedosos ya no simplemente ampliativos —en una visión acumulativa del conocimiento— de teorías pasadas —recordemos que la mecánica newtoniana es incorporable, como caso límite, dentro del seno de un marco relativista si se toma la variable de Lorentz como despreciable, aunque no eliminada, en contextos mecánicos a bajas velocidades—. Surgieron proyectos de sustitución.

La lógica de primer orden se impuso, especialmente a partir de los desarrollos computacionales al demostrarse equivalente a una máquina de Turing. Desde ella se definieron axiomáticas como ristras de fórmulas en dicho lenguaje capaces de acotar sus modelos: las estructuras en que fueran verdaderas. Con esto se logró construir el edificio completo de la matemática estándar contemporánea y la física mecánica y todo bajo el insoslayable precio de tener que renunciar a una capacidad de representación

[31] Linsky y Zalta (1995) y Balaguer (1998) han propuesto un platonismo pleno; autores como Quine o Putnam han desarrollado aproximaciones empíricas que han terminado por acuñar el conocido como platonismo *naturalista*; Bernays (1935) y Tait (2005) entre otros han sostenido platonismos deflacionistas; además hay también propuestas estructuralistas como las de Shapiro (1997) o Resnik (1997), neo-nominalismos como el de Goodman y Quine (1947) o el de Field (1980) de corte fisicalista o *in rebus*; ficcionalismos como el de Leng (2010) o Yablo (2014), etc.
[32] Para una visión histórica que conecta con la filosofía de la ciencia contemporánea ver Suárez (2019).
[33] French (1968).

de objetos formales clásica como relevante, siquiera, en la constitución de cualquier tipo de conocimiento formal.

5. Conclusiones

Volvamos a nuestro argumento inicial. Si justificamos, al menos, la viabilidad histórica de 4 y la segunda versión del argumento, topamos necesariamente con que la única vía para afirmar la sostenibilidad de una facultad de la *intuición* en cualquier contexto o —más dramático aún[34]— tratar de recuperar ciertas nociones kantianas como la *representación*, habrá de ser al precio de asumir una postura intuicionista. En cualquier otro caso, nos veremos abocados a definir cualesquiera diagramatizaciones o esquemas *visuales* de los que mencionábamos al principio como procesos caracterizados previamente en primer orden y equivalentes semiológicamente a un proceso sito en dicha semántica. Y, en cualquier caso, nos veremos abocados a renunciar a la *intuitividad* como criterio de discernimiento en cualquier discusión académica. Esto último es, sin duda, algo a lo que aún no nos hemos acostumbrado. La *intuición*, dentro de contextos de discusión filosófica, podrá implementarse en su sentido más informal: aludiendo a cierto tipo de razonamientos abductivos —como los propuestos por Peirce—, a razonamientos inconscientes —como en las propuestas de Poincaré—, o a cualesquiera otros desarrollos cognitivos que, sin dejar de ser relevantes e interesantes, caen del lado de las ciencias cognitivas o la psicología conductual y, en cualquier caso, no de la lógica[35].

Y existen numerosos argumentos en contra de la presunta hegemonía de la semántica de primer orden tratando de reducirla o explicarla a través de los procesos psicológicos anteriores, pero terminan incurriendo en la eliminación de la distinción entre uso y mención. Una cosa es que yo, de *facto*, emplee a nivel *formal* una semántica estándar que me permita manipular, *a nivel existencial* vía cuantificadores, objetos y propiedades de objetos sobre los que construir teorías. Otra muy distinta es la explicación histórica acerca de cómo hemos alcanzado dicha teoría: ya sea atendiendo a los avances científicos concretos —cuyos resultados nos han alejado de la concepción clásica—, ya sea intentando realizar una reducción biológico-evolutiva de dichas herramientas —pues el principal reto al que se enfrenta hoy en día este proceso reduccionista es el de dar cuenta de no numerabilidad de conjuntos como el de los *reales*.

En otras palabras, cualquier análisis recurrente, realizado, por ejemplo, en una lengua natural, y afectado, como por otra parte parece sensato aceptar, por la tesis de la relatividad lingüística —tomada en clave moderada— no supondrá en ningún caso un problema para la superación teórica que aquí hemos planteado. Y, sin embargo, eso no fuerza tener que abrazar tesis cognitivistas clásicas de tipo innatista siguiendo a Chomsky o Fodor: simplemente se trata de dos planos distintos. Por un lado, el lingüístico, por otro, el metafísico. Esto último se deja entrever, aunque nunca de forma explícita, en el nuevo *realismo especulativo* que aún sigue anclado, en numerosas ocasiones, a ciertos principios representacionales clásicos. Pero no debemos olvidar que la imagen de la *reducción* de los discursos informales a una semántica de primer orden termina siendo, muchas veces, un hombre de paja como consecuencia de confundir que la lógica de primer orden sea *clásica*^{2} con el hecho de que la silogística, sobre la que descansaba la intuición kantiana, es como *clásica*^{1}.

El *idealismo* ya no permite, entonces, aunar una postura *realista* respecto de los objetos abstractos —platonismo— con una caracterización preponderante de las limitaciones del ideal de la razón y de la intuición sobre cualesquiera desarrollos conceptuales. Ahora el *idealismo* ha de ser constructivista e intuicionista o realista y neo-logicista, pero no ambas. Y la facultad de la representación de ciertos objetos en matemáticas, mientras el intuicionismo no resuelva e imponga su propia capacidad de presentarse como una alternativa viable, queda desechada como mera propedéutica. Y, aun en caso de conseguirlo, no habremos entonces de olvidar que tendremos que renunciar a una lógica clásica, clásica incluso en sentido de *clásica*^{2} y que lo que habremos hecho, entonces, renunciando al principio de tercio excluso, no será sino habernos alejado aún más de un tratamiento *clásico*^{1}.

---

[34] Precisamente porque tiende a ignorarse.

[35] Ordóñez, (2006).

Referencias

Ayer, A. J. (1959). *Logical Positivism*. Free Press: Nueva York.
Badiou, A. (1988). *L'être et l'événement.* Seuil: París.
Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
Beauchot, M. (1980). *El problema de los universales*. UNAM: México.
Bell, J. L. (2022). *Higher-Order Logic and Type Theory*. Cambridge Elements. Philosophy and Logic. Cambridge University Press: Londres.
Benacerraf (1973). *Mathematical Truth*, en Benacerraf & Putnam 1983, 403-420.
Benítez López, A. (2020). *La Silogística de Aristóteles*. Guillermo Escolar Editor: Madrid.
Bernays (1935). *On Platonism in Mathematics*, in Benacerraf & Putnam 1983, pp. 258-271.
Beth, E. W. y Piaget, J. (1974). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Synthese: Nueva York. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2193-6.
De Bustos Guadaño, E. (1999). *Filosofía del Lenguaje*. UNED: Madrid.
Dummett, M. (2000). *Elements of Intuitionism*. Oxford University Press: Oxford.
Falguera, J. L. y Martínez-Vidal, C. (2012). *Abstract Objects*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/abstract-objects/>.
Fernández Cuesta (2022). *La lógica modal como herramienta metodológica en epistemología*. HUMAN REVIEW. International Humanities Review, 11(1), 71-79. https://doi.org/10.37467/gkarevhuman.v11.3016.
Fernández Mateo, J. (2022). *Realidad artificial. Un análisis de las potenciales amenazas de la inteligencia Artificial.* VISUAL REVIEW. International Visual Culture Review / Revista Internacional De Cultura Visual, 9(2), 235-247. DOI: https://doi.org/10.37467/revvisual.v9.5004.
Field (1980). *Science without Numbers: a defense of nominalism*. Blackwell: Oxford.
Frápolli Sanz, M. J. (2014). *Cuerpos y números ¿Qué significa existir?* En Villar Ezcurra, A. y Sánchez Orantos, A. (eds.), Una ciencia humana: libro homenaje a Camino Cañón Loyes (pp. 59-72). Universidad Pontificia de Comillas.
Frege, G. (1892). *Über Sinn und Bedeutung*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, vol. 100, 25-50.
French, A. P. (1968). *Special Relativity*. MIT Introductory Physics: Massachusetts.
García-Baró, M. (2008). *Teoría Fenomenológica de la Verdad.* Comentario continuo a la primera edición de Investigaciones lógicas de Edmund Husserl. Comillas: Madrid.
Gherab Martín, K. (2022). *Mentes contra Máquinas: revisión histórica y lógico-filosófica del argumento gödeliano de Lucas-Penrose*. Human Review. International Humanities Review, 11, 185-195. DOI: https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4503.
Gilbert, M. A. (2011). *The Kisceral: Reason and Intuition in Argumentation*. Argumentation, 25: 163-170. https://doi.org/10.1007/s10503-011-9210-2.
Goodman y Quine (1947). *Steps Towards a Constructive Nominalis, Journal of Symbolic Logic*, 12: 97-122.
Heyting, A. (1930) *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*. (German) 3 partes, en: Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften. phys.-math. Klasse, 42-56, 57-71, 158-169.
Heyting, A. (1934) *Mathematische Grundlagenforschung*. Intuitionismus. Beweistheorie. Springer, Berlin.
Heyting, A. (1941) *Untersuchungen der intuitionistische Algebra*. (German) Verh. Nederl. Akad. Wetensch. Afd. Natuurk. Sect. 1. 18. no. 2, 36 pp.
Heyting, A. (1956) *Intuitionism. An introduction*. North-Holland Publishing Co.: Amsterdam.
Heyting, A. (1959) *Axioms for intuitionistic plane affine geometry. The axiomatic method. With special reference to geometry and physics*. Proceedings of an International Symposium held at the Univ. of Calif., Berkeley, Dec. 26, 1957Jan 4, 1958 (edited by L. Henkin, P. Suppes and A. Tarski) pp. 160-173 Studies in Logic and the Foundations of Mathematics North-Holland Publishing Co.: Amsterdam.
Leng (2010). *Mathematics and Reality*. Oxford University Press: Oxford.
Linsky y Zalta (1995). *Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism,* Journal of Philosophy, 92, 525-555.

Maddy (1990). *Realism in Mathematics*. Clarendon Press: Oxford.

Malík, J. (2022). Wrestling with the Posthuman: Understanding the Relationship between Human Autonomy and Technology. TECHNO REVIEW. International Technology, Science and Society Review /Revista Internacional De Tecnología, Ciencia Y Sociedad, 11(2), 141-158. DOI: https://doi.org/10.37467/gkarevtechno.v11.3252.

Martin, A. (2007). *The Representation of Object Concepts in the Brain*. Annual Review of Psychology, 58, 25-45. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.57.102904.190143.

Meillassoux, Q. (2006). *Après la finitude. Essai sur la nécessité de la contingence*. Éditions du Seuil: París.

Nado, J. (2015). *The intuition deniers.* Philosophical Studies, 173, 781-800. https://doi.org/10.1007/s11098-015-0519-9.

Ordóñez Pinilla, C. A. (2006). *Monismo anómalo, intencionalidad, falacias mentales e inteligencia artificial.* Bajo Palabra, (1), 38-54. DOI: https://doi.org/10.15366/bp2006.1.004.

Ortega y Gasset, J. (1915). *Conciencia, objeto y las tres distancias de éste (fragmentos de una lección)* en Obras Completas Vol 2. Revista de Occidente: Madrid.

Parsons (1980). *Mathematical Intuition.* Proceedings of the Aristotelian Society, 80: 145-168.

Pérez, C. F. (1999). *Historia de las ideas estéticas y de las teorías artísticas Contemporáneas*. Volumen II. Ed. Valeriano Bozal. La Balsa de Medusa, 81.

Ramsey, F. (1931). *The Foundations of Mathematics*. Routledge: Londres.

Resnik (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Clarendon Press: Oxford.

Rivadulla, A. (2004). *Éxito, razón y cambio en física: un enfoque instrumental en teoría de la ciencia*. Trotta: Madrid.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (2000). *Historia de la matemática.* Vols. I y II. Editorial Gedisa: Barcelona.

Shapiro (1997*). Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* Oxford University Press: Oxford.

Tait (2005). *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and its History*. Oxford University Press: Oxford.

Russell, B. (1918). *The Philosophy of Logical Atomism.* En Robert Charles Marsh (ed.), “Bertrand Russell. Logic and Knowledge”. Unwin Hyman: Londres.

Suárez, M. (2019). *Filosofía de la Ciencia: historia y práctica*. Técnos: Madrid.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Harcourt, Brace & Co.: Nueva York.

Yablo (2014). *Aboutness*. Princeton University Press: Princeton.